DOI:10.15924/j.cnki.1009-5128.2013.09.006



# Smarandache 可乘函数的一个结果

门 亚 玲

（咸阳职业技术学院 基础部，陕西 咸阳 711200）

**摘　要：**在 Smarandache 可乘函数的基础上，定义了一个新的可乘函数，利用初等数论的方法，通过猜测、归纳得出了其和函数的几个重要结论.

**关键词：**Smarandache；可乘函数；整数

**中图分类号：**O156.4　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**1009-5128（2013）09-0019-02

**收稿日期：**2013-05-29

**基金项目：**陕西省科技厅自然科学基金项目（2012JM1021）；陕西省教育厅专项科研计划项目（12JK0880）

**作者简介：**门亚玲（1989—），女，陕西咸阳人，咸阳职业技术学院讲师，主要从事数论研究.

## 1　引言及主要结论

罗马尼亚著名的数论专家 Smarandache 教授引入了一类新的可乘函数，被称之为 Smarandache 可乘函数，其定义为：$f(1)=1$，对于任意的正整数 $n>1$，若 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 为 $n$ 的标准分解式，则有 $f(n)=\max\{f(p_1^{\alpha_1}),f(p_2^{\alpha_2}),\cdots,f(p_s^{\alpha_s})\}$. 许多专家和学者都研究了它的性质，得到了一些好的结果[1-4].

现在我们定义函数：$f(p^\alpha)=\alpha p$，显然这是一个新的可乘函数，并取其和函数，记为 $Smd(n)=\sum\limits_{d\mid n}\frac{1}{f(d)}$. 在大量研究的基础上，我们已经证明了这个结果的几个简单情况[5-8]，本文在前期研究的基础上，对结果的情况进行了推广，于是我们提出下面的定理.

**定理 1**　设 $n$ 为任意正整数，$Smd(n)=\sum\limits_{d\mid n}\frac{1}{f(d)}$，当 $n\neq 1,24$ 时，则有：

（1）若 $n$ 的标准分解式为 $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}p$，$p_1^{\alpha_1}<p_2^{\alpha_2}<\cdots<p_s^{\alpha_s}<p$，且 $p,p_i$ 为素数，$i=1,2,\cdots,s$ 时，$Smd(n)$ 不是正整数；

（2）若 $n$ 的标准分解式为 $p_1p_2\cdots p_s$，$p_1<p_2<\cdots<p_s$，$p_i$ 为素数，$i=1,2,\cdots,s$ 时，$Smd(n)$ 不是正整数.

## 2　定理的证明

显然，由定义当 $n=1,24$ 时，$Smd(n)=\sum\limits_{d\mid n}\frac{1}{f(d)}$ 为整数，所以以下假设 $n\neq 1,24$.

对于定理 1，当 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}p$，$p_1^{\alpha_1}<p_2^{\alpha_2}<\cdots<p_s^{\alpha_s}<p$，$p,p_i$ 为素数，$i=1,2,\cdots s$ 时，

$$Smd(n)=\sum_{d\mid n}\frac{1}{f(d)}=\sum_{d\mid \frac{n}{p}}\frac{1}{f(d)}+\sum_{d\mid \frac{n}{p}}\frac{1}{f(dp)}=\sum_{d\mid \frac{n}{p}}\frac{1}{f(d)}+\sum_{d\mid \frac{n}{p}}\frac{1}{p}$$
$$=\sum_{d\mid \frac{n}{p}}\frac{1}{f(d)}+\frac{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_s+1)}{p}.$$

若令 $\sum\limits_{d\mid \frac{n}{p}}\frac{1}{f(d)}=\frac{\nu}{\mu}$，则

$$Smd(n)=\sum_{d\mid n}\frac{1}{f(d)}=\frac{\nu}{\mu}+\frac{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_s+1)}{p}=\frac{\nu p+\mu(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_s+1)}{\mu p}.$$

假设 $Smd(n)=\sum\limits_{d\mid n}\frac{1}{f(d)}=\frac{\nu p+\mu(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_s+1)}{\mu p}=M$，$M$ 为正整数. 则有

$$p \mid (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_s+1),$$

即存在一个$(\alpha_i+1)$,$i=1,2,\cdots,s$ 使得 $p \mid (\alpha_i+1)$,由整除的性质可得 $\alpha_i+1 \geqslant p$,即 $\alpha_i \geqslant p-1$.

又 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}p$,$p_1^{\alpha_1}<p_2^{\alpha_2}<\cdots<p_s^{\alpha_s}<p$,$p$,$p_i$ 为素数时,对于 $p_i^{\alpha_i}$ 有

$$f(p_i^{\alpha_i})=\alpha_i p_i \geqslant (p-1)p_i > p.$$

这与当 $p_1^{\alpha_1}<p_2^{\alpha_2}<\cdots<p_s^{\alpha_s}<p$ 时,$f(p_i^{\alpha_i})<f(p)=p$ 矛盾,所以假设不成立.

故 $Smd(n)=\sum_{d\mid n}\frac{1}{f(d)}=\frac{\nu p+\mu(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_s+1)}{\mu p}$ 不是正整数,即

$$Smd(n)=\sum_{d\mid n}\frac{1}{f(d)}=\sum_{d\mid \frac{n}{p}}\frac{1}{f(d)}+\frac{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_s+1)}{p}$$

不是正整数.

对于(2),当 $n=p_1p_2\cdots p_s$,$p_1<p_2<\cdots<p_s$,$p_i$ 为素数 $i=1,2,\cdots,s$ 时,则有

$$f(n)=f(p_1p_2\cdots p_s)=\max\{f(p_1),f(p_2),\cdots,f(p_s)\}=f(p_s)=p_s.$$

令 $n=p_1p_2\cdots p_s=n_1p_s$

则有 $Smd(n)=Smd(p_1p_2\cdots p_s)=\sum_{d\mid n}\frac{1}{f(d)}=\sum_{d\mid n_1}\frac{1}{f(d)}+\sum_{d\mid n_1}\frac{1}{f(dp_s)}$

$$=\sum_{d\mid n_1}\frac{1}{f(d)}+\sum_{d\mid n_1}\frac{1}{p_s}=\sum_{d\mid n_1}\frac{1}{f(d)}+\frac{d(n_1)}{p_s}=\sum_{d\mid n_1}\frac{1}{f(d)}+\frac{2^{s-1}}{p_s}=\cdots=\sum_{i=1}^{s}\frac{2^{i-1}}{p_i}.$$

假设 $Smd(n)=Smd(p_1p_2\cdots p_s)=\sum_{i=1}^{s}\frac{2^{i-1}}{p_i}=M$,$M$ 为正整数.

又由 $s>1$,则 $p_s$ 为奇素数,所以 $\sum_{i=1}^{s}\frac{2^{i-1}}{p_i}-M=\frac{2^{s-1}}{p_s}$.

即可得 $p_1p_2\cdots p_s\cdot\left(\sum_{i=1}^{s}\frac{2^{i-1}}{p_i}-M\right)=p_1p_2\cdots p_{s-1}\cdot 2^{s-1}$.

显然上式左边可以被 $p_s$ 整除,而右边不能被 $p_s$ 整除,这是矛盾的.

故 $Smd(n)=Smd(p_1p_2\cdots p_s)$ 不是正整数.

## 参考文献:


[1] 潘承洞,潘承彪. 初等数论[M]. 北京:北京大学出版社,1992.

[2] 易媛,亢小玉. Smarandache 问题研究[M]. Chicago: High American Press,2006.

[3] Ton. M. Apostol. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York: Springer-Verlag,1976.

[4] 乐茂华. 两个有关伪 Smarandache 函数的方程[J]. 吉林化工学院学报,2004,21(4):96-104.

[5] 徐哲峰. Smarandache 函数的值分布性质[J]. 数学学报,2006,49(5):1009-1012.

[6] F. Smarandache. Only Problems,Not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publ House,1993.

[7] 陈斌. 关于 Smarandache 可乘函数的一个猜测的两个结果[J]. 科学技术与工程,2008,8(12):3260-3261.

[8] 陈斌. 关于高斯函数的一个结论[J]. 甘肃科学学报,2010,22(4):43-45.


【责任编辑 牛怀岗】

# A Result of the Smarandache Multiplicative Function

MEN Ya-ling

(Department of Basic Science, Xianyang Vocational and Technical College, Xianyang 711200, China)

**Abstract:** On the Smarandache multiplicative function, a new multiplicative function is defined. Using the elementary methods of the number theory, the paper obtained several important conclusions with the relations of the function by guessing and inducting.

**Key words:** Smarandache; multiplicative function; integer